на правах рукописи

Солодушкин Святослав Игоревич

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ В КООРДИНАТАХ И УПРАВЛЕНИИ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2009

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте математики и механики УрО РАН в отделе дифференциальных уравнений

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, А.В. Ким
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, Н.Ю. Лукоянов кандидат физико-математических наук, Ю.Н. Седов
Ведущая организация:	ГОУ ВПО "Уральский государственный технический университет – УПИ им. первого Президента России Б.Н. Ельцина"

Защита диссертации состоится 11 декабря 2009 г. в 13 часов на заседании диссертационного совета Д 212.286.10 при ГОУ ВПО "Уральский государственный университет им. А.М. Горького" по адресу: 620000, г. Екатеринбург, ул. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО "Уральский государственный университет им. А.М. Горького".

Автореферат разослан 10 ноября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задачи стабилизации линейных дифференциальных систем с запаздыванием (иными словами последействием) в фазовых координатах и управлении возникают при моделировании многих технических, физических, биологических, экономических процессов. Присутствие запаздывания является неотъемлемым свойством многих систем, и попытки построить модель, в которой запаздыванием пренебрегают, зачастую приводят к неверным результатам; качественного соответствия модели и реального процесса можно добиться только учитывая запаздывание.

Основополагающими в теории аналитического конструирования регуляторов (АКОР) для систем с последействием являются работы Н.Н. Красовского [1–3], в которых показано, что оптимальное стабилизирующее управление является линейным непрерывным функционалом на функциональном (фазовом) пространстве системы с последействием, а также выведены соотношения, описывающие параметры оптимального управления и оптимального значения функционала качества.

Существенный вклад в развитие качественной теории функционально-дифференциальных уравнений и, в частности, линейно-квадратичной задачи управления внесли Н.В. Азбелев, Р. Габасов, А.М. Зверкин, Г.А. Каменский, Ф.М. Кириллова, В.Б. Колмановский, Н.Н. Красовский, А.В. Кряжимский, А.А. Мартынюк, Ю.А. Митриполький, А.Д. Мышкис, С.Б. Норкин, В.Р. Носов, Ю.С. Осипов, Л.С. Понтрягин, Б.С. Разумихин, Ю.М. Репин, А.Л. Скубачевский, С.Н. Шиманов, Г.Л. Харатишвили, Э.Л. Эльсгольц, H.T. Banks, R. Bellman, T.A. Burton, K. Cooke, C. Corduneanu, M. Delfour, R. Driver, A. Halanay, J. Hale, L. Hatvani, H. Kushner, V. Lakshmikantan, K. Ushida, V. Volterra и другие авторы.

К настоящему времени теоретические аспекты АКОР для систем с последействием разработаны с достаточной полнотой, однако, в силу бесконечномерной природы систем с последействием, практическое применение теории наталкивается на ряд принципиальных трудностей. Поэтому разработка конструктивных алгоритмов АКОР для систем с последействием постоянно находится в центре внимания математиков и инженеров.

Одной из основных трудностей, сдерживающих практическое использование АКОР в задачах синтеза управления для систем с последействием, является необходимость решения специальной системы обобщенных уравнений Риккати (ОУР), описывающей коэффициенты оптимального управления и представляющей собой систему алгебраических уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными. В связи с этим, уже в первых работах, где были получены ОУР, проблема АКОР для систем с последействием была сформулирована в виде двух задач: 1) нахождение явных решений ОУР и 2) разработка методов исследования стабилизирующих свойств управлений, соответствующих явным решениям ОУР.

Следует особо подчеркнуть, что решение первой из задач не является самоцелью, а позволяет построить синтез управления в явном виде. Также отметим, что для систем с последействием, в отличие от конечномерных систем, линейное управление с обратной связью, построенное на основе решения ОУР, не всегда является стабилизирующим. Поэтому выделение исследования устойчивости в отдельную представляется естественным. В настоящей работе исследуются и решаются обе этих задачи. В работе используется подход, развитый в [4–6].

Цель работы. Разработка конструктивных аналитических и численных методов синтеза стабилизирующих управлений для систем с последействием в координатах и управлении на основе минимизации обобщенных квадратичных функционалов качества.

Методика исследования. Основные результаты базируются на функциональном подходе в качественной теории функционально-дифференциальных уравнений. Систематически применяются понятия и методы функционального анализа, теории устойчивости и управления, и численные методы.

Научная новизна. В работе получены следующие основные результаты.

1) Исследована задача стабилизации тривиального решения линейной системы с запаздыванием в фазовых координатах и управлении. Исходная задача сведена к задаче оптимального управления на бесконечном промежутке, решение которой сводится к решению ОУР. Минимизируемый функционал имеет несколько свободных параметров, распоряжаясь которыми, можно, во-первых, упростить ОУР, а, во-вторых, сделать найденное управление стабилизирующим. Получен явный вид управления через решения ОУР.

2) Система ОУР явно сведена к решению одного алгебраического матричного уравнения. Показано, что, распоряжаясь свободными параметрами минимизируемого функционала, можно произвольную матрицу сделать решением данного уравнения. Выбирать это решение, а вместе с ним и свободные параметры, необходимо исходя из требований стабилизации. Как следствие, закрыт вопрос о способах решения получаемого алгебраического матричного уравнения.

3) На основе теоремы об асимптотической устойчивости ([1], стр. 172) получены достаточные условия на параметры, гарантирующие стабилизирующие свойства управления. На основе численного моделирования фундаментальной матрицы решений получен конструктивный критерий стабилизируемости системы.

4) Создан пакет программ на MATLAB для нахождения стабилизирующего управления.

Теоретическая и практическая значимость. Развитые в диссертации методы позволяют строить и анализировать синтез управления для систем с последействием. Разработанные методы и алгоритмы реализованы в пакете прикладных программ Time-delay System Stabilization в системе MATLAB.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на Всероссийских конференциях «Теория управления и математическое моделирование» (Ижевск, 2006, 2008), Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна -2008 (Воронеж, 2008), 39-й и 40-й Всероссийских конференциях «Проблемы теоретической и прикладной математики» (Екатеринбург, 2008, 2009), а также на научных семинарах в Институте математики и механики УрО РАН и Уральском государственном университете им. А.М. Горького.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 7 работах, список которых приведен в конце автореферата. Из них 3 опубликованы в ведущий рецензируемых научных журналах, определенных ВАК. Результаты работ получены диссертантом самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, приложения, где описан программный комплекс, и списка литературы. Главы разбиты на разделы. Объем диссертации составляет 74 страницы, включая библиографический список из 42 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

ВВЕДЕНИЕ содержит историю вопроса и краткий обзор работ. Во введении обосновывается актуальность, формулируется цель диссертационной работы и пути её достижения, отмечается новизна и практическое значение работы.

В ПЕРВОЙ ГЛАВЕ дается постановка задачи АКОР для систем с запаздыванием в фазовых координатах и управлении.

Основным объектом исследования является управляемая система с последействием

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = {} & Ax(t) + A_\tau x(t-\tau) + \int_{-\tau}^{0} A(s)x(t+s)\,ds + \\ & + Bu(t) + B_\Delta u(t-\Delta) + \int_{-\Delta}^{0} B(\zeta)u(t+\zeta)\,d\zeta,\end{aligned} \tag{1}$$

где τ и Δ — положительные константы, A, A_τ — постоянные $n\times n$ матрицы, B, B_Δ — постоянные $n\times r$ матрицы, $A(\cdot)$ — $n\times n$ матрица-функция с непрерывными на $[-\tau;0]$ элементами, $B(\cdot)$ — $n\times r$ матрица-функция с непрерывными на $[-\Delta;0]$ элементами, $x\in R^n$ — фазовый вектор, $u\in R^r$ — управление, формируемое по закону обратной связи.

Вводится обозначение
$\{x, y(\cdot), w(\cdot)\} = \{x(t); x(t+s),\ s \in [-2\tau; 0); u(t+\zeta),\ \zeta \in [-\tau-\Delta; 0)\}$.

Управление для системы (1) ищется в классе линейных отображений

$$u[t, x, y(\cdot), w(\cdot)] = Ex + E_\tau y(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} L_\tau(s) y(s)\, ds + \int_{-\Delta}^{0} L_\Delta(\zeta) w(\zeta)\, d\zeta, \quad (2)$$

где E, E_τ — постоянные $r \times n$ матрицы, $L_\tau(\cdot), L_\Delta(\cdot)$ — $r \times n$ и $r \times r$ матрицы с непрерывными и кусочно-непрерывно дифференцируемыми на $[-\tau; 0]$ и $[-\Delta; 0]$ элементами соответственно (разрывы производной только первого рода, в точках разрыва непреывность срава, нет точек сгущения).

Вводится в рассмотрение замкнутая система в дифференциальной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = & Ax + A_\tau y(-\tau) + \int\limits_{-\tau}^{0} A(s) y(s)\, ds + Bu + B_\Delta w(-\Delta) + \int\limits_{-\Delta}^{0} B(\zeta) w(\zeta)\, d\zeta, \\ \dot{u} = & [EA + L_\tau(0)]x + [EA_\tau - L_\tau(-\tau) + E_\tau A] y(-\tau) + E_\tau A_\tau y(-2\tau) + \\ & + \int\limits_{-\tau}^{0} \left[EA(s) + \dfrac{d\,L_\tau(s)}{ds} \right] y(s)\, ds + \int\limits_{-\tau}^{0} E_\tau A(s) y(-\tau+s)\, ds + \\ & + [EB + L_\Delta(0)]u + [EB_\Delta - L_\Delta(-\Delta)] w(-\Delta) + E_\tau B w(-\tau) + \\ & + E_\tau B_\Delta w(-\tau-\Delta) + \\ & + \int\limits_{-\Delta}^{0} \left[EB(\zeta) + \dfrac{d\,L_\Delta(\zeta)}{d\zeta} \right] y(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{-\Delta}^{0} E_\tau B(\zeta) y(-\tau+\zeta)\, d\zeta. \end{cases} \quad (3)$$

При соответствующих начальных условиях можно поставить задачу Коши для (1), (2) и для (3). Доказывается эквивалентность этих задач Коши.

Формализуется понятие управления, стабилизирующего систему (1), как управления, обеспечивающего x-асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (3). Основную задачу, решаемую в диссертации, можно сформулировать следующим образом: найти управление (2), стабилизирующее систему (1). Известно, что из асимптотической устойчиовости тривиального решения системы (3) следует x-асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (3), поэтому достаточно найти такое управление, которое обеспечит асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (3).

Для поиска одного из возможных стабилизирующих управлений, задаче стабилизации ставится в соответствие задача оптимального управления на бесконечном промежутке, состоящая в минимизации специального квадратичного функционала вдоль решений системы. Используется понятие обобщенной энергии, введенное А.А. Красовским. Поскольку задача состоит именно в стабилизации системы, то структуру и коэффициенты функционала следует выбирать так, чтобы упростить исходную задачу.

$$J = J[x(\cdot), u(\cdot)] = \int\limits_0^{\infty} \Big[Z + u'Mu\Big]\, dt, \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered}
Z = Z[x(\cdot), u(\cdot)] = x'\Phi_0 x + \\
+ 2x' \int\limits_{-\tau}^{0} \Phi_1(s) y(s)\, ds + \int\limits_{-\tau}^{0} y'(s)\Phi_2(s) y(s)\, ds + \int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{-\tau}^{0} y'(s)\Phi_3(s,\nu) y(\nu)\, ds\, d\nu + \\
+ y'(-\tau)\Phi_4 y(-\tau) + \\
+2x' \int\limits_{-\Delta}^{0} \Psi_1(s) w(s) ds + \int\limits_{-\Delta}^{0} w'(s)\Psi_2(s) w(s) ds + \int\limits_{-\Delta}^{0}\int\limits_{-\Delta}^{0} w'(s)\Psi_3(s,\nu) w(\nu) ds d\nu + \\
+ w'(-\Delta)\Psi_4 w(-\Delta) + \\
+ 2y'(-\tau) \int\limits_{-\Delta}^{0} \Upsilon_1(s) w(s)\, ds + y'(-\tau)\Upsilon_2 w(-\Delta) + \\
+ 2 \int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{-\Delta}^{0} y'(s)\Upsilon_3(s,\nu) w(\nu)\, ds\, d\nu.
\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь Φ_0 и Φ_4 — постоянные симметричные $n \times n$ матрицы; $\Phi_1(s)$ — $n \times n$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\tau; 0]$ коэффициентами; $\Phi_2(s)$ — симметричная $n \times n$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\tau; 0]$ коэффициентами; $\Phi_3(s,\nu)$ — $n \times n$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\tau; 0] \times [-\tau; 0]$ коэффициентами; $\Psi_1(s)$ — $n \times r$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\Delta; 0]$ коэффициентами; $\Psi_2(s)$ — симметричная $r \times r$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\Delta; 0]$ коэффициентами; $\Psi_3(s,\nu)$ — $r \times r$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\Delta; 0] \times [-\Delta; 0]$ коэффициентами; Ψ_4 — постоянная симметричная $r \times r$ матрица; $\Upsilon_1(s)$ — $n \times r$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\Delta; 0]$ коэффициентами; Υ_2 — постоянная симметричная $n \times r$ матрица; $\Upsilon_3(s,\nu)$ — $n \times r$ матрица с кусочно-непрерывными на $[-\tau; 0] \times [-\Delta; 0]$ коэффициентами; M симметричная положительно определенная $r \times r$ матрица.

ВО ВТОРОЙ ГЛАВЕ дается вывод системы обобщенных уравнений Риккати (ОУР), к решению которой сводится нахождение коэффициентов стабилизирующего управления. Оптимальное значение (функционал Беллмана) для задачи (1), (2), (4) обозначается через $W[x, y(\cdot), w(\cdot)]$. Функционал

W ищется в виде

$$W = W[x, y(\cdot), w(\cdot)] = x'Px+$$
$$+ 2x' \int\limits_{-\tau}^{0} D(s)y(s)\,ds + \int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{-\tau}^{0} y'(s)R(s,\nu)y(\nu)\,ds\,d\nu + \int\limits_{-\tau}^{0} y'(s)\Pi(s)y(s)\,ds+$$
$$+ 2x' \int\limits_{-\Delta}^{0} \Lambda(s)w(s)\,ds + \int\limits_{-\Delta}^{0}\int\limits_{-\Delta}^{0} w'(s)\Theta(s,\nu)w(\nu)\,ds\,d\nu + \int\limits_{-\Delta}^{0} w'(s)\Xi(s)w(s)\,ds+$$
$$+ 2\int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{-\Delta}^{0} y'(s)\beta(s,\nu)w(\nu)\,ds\,d\nu + 2y'(-\tau)\int\limits_{-\Delta}^{0} \gamma(s)w(s)\,ds. \tag{6}$$

Теорема 1 *Предположим, что*
(1) *существует решение задачи* (1), (2), (4);
(2) P *— симметричная* $n \times n$ *матрица;*
(3) *элементы* $n \times n$ *матриц* $D(\cdot)$ *и* $\Pi(\cdot)$ *непрерывны и кусочно-дифференцируемы на* $[-\tau, 0]$;
(4) *элементы* $n \times r$ *матриц* $\Lambda(\cdot)$ *и* $\Xi(\cdot)$ *непрерывны и кусочно-дифференцируемы на* $[-\Delta, 0]$;
(5) *элементы* $n \times n$ *матрицы* $R(\cdot,\cdot)$ *и её производных* $\dfrac{\partial R(s,\nu)}{\partial s}$ *и* $\dfrac{\partial R(s,\nu)}{\partial s}$ *непрерывны всюду на* $[-\tau, 0]\times[-\tau, 0]$ *исключая, быть может, линию* $s = \nu$;
(6) *элементы* $n \times r$ *матрицы* $\Theta(\cdot,\cdot)$ *и её производных* $\dfrac{\partial \Theta(s,\nu)}{\partial s}$ *и* $\dfrac{\partial \Theta(s,\nu)}{\partial s}$ *непрерывны всюду на* $[-\Delta, 0]\times[-\Delta, 0]$ *исключая, быть может, линию* $s = \nu$;
(7) *для матрицы* $R(\cdot,\cdot)$ *выполнено условие* $R(s,\nu) = R'(\nu, s)$ *на* $[-\tau, 0]\times[-\tau, 0]$;
(8) *для матрицы* $\Theta(\cdot,\cdot)$ *выполнено условие* $\Theta(s,\nu) = \Theta'(\nu, s)$ *на* $[-\Delta, 0]\times[-\Delta, 0]$;
(9) *элементы* $n \times r$ *матрицы* $\beta(\cdot,\cdot)$ *и её производных* $\dfrac{\partial \beta(s,\nu)}{\partial s}$ *и* $\dfrac{\partial \beta(s,\nu)}{\partial s}$ *непрерывны всюду на* $[-\tau, 0]\times[-\Delta, 0]$;
(10) *элементы* $n\times r$ *матрицы* $\gamma(\cdot)$ *непрерывны и кусочно-дифференцируемы на* $[-\Delta, 0]$;
(11) *матрица* $\Xi(0) + M$ *положительно определена.*
Тогда матрицы $P, D(\cdot), R(\cdot,\cdot), \Pi(\cdot), \Lambda(\cdot), \Theta(\cdot,\cdot), \Xi(\cdot)$ *являются решением си-*

стемы ОУР

$$
\begin{aligned}
&P'A + A'P + D(0) + D'(0) + \Pi(0) + \Phi_0 = \Big(P'B + \Lambda(0)\Big)K\Big(B'P + \Lambda'(0)\Big),\\
&\frac{d\,D(s)}{ds} = P'A(s) + A'D(s) + R(0,s) -\\
&\qquad -\Big(P'B + \Lambda(0)\Big)K\Big(B'D(s) + \beta'(s,0)\Big) + \Phi_1(s),\\
&\frac{d\Lambda(s)}{ds} = P'B(s) + A'\Lambda(s) + \beta(0,s) -\\
&\qquad -\Big(P'B + \Lambda(0))K\Big(B'\Lambda(s) + \Theta(0,s)\Big) + \Psi_1(s),\\
&\frac{d\,\Pi(s)}{ds} = \Phi_2(s),\\
&\frac{d\,\Xi(s)}{ds} = \Psi_2(s),\\
&\frac{\partial R(s,\nu)}{\partial s} + \frac{\partial R(s,\nu)}{\partial \nu} = D'(s)A(\nu) + A'(\nu)D(s) -\\
&\qquad -\Big(D'(s)B + \beta(s,0)\Big)K\Big(B'D(\nu) + \beta'(\nu,0)\Big) + \Phi_3(s,\nu),\\
&\frac{\partial \Theta(s,\nu)}{\partial s} + \frac{\partial \Theta(s,\nu)}{\partial \nu} = \Lambda'(s)B(\nu) + B'(\nu)\Lambda(s) -\\
&\qquad -\Big(\Lambda'(s)B + \Theta(s,0)\Big)K\Big(B'\Lambda(\nu) + \Theta(0,\nu)\Big) + \Psi_3(s,\nu),\\
&\frac{\partial \beta(s,\nu)}{\partial s} + \frac{\partial \beta(s,\nu)}{\partial \nu} = D'(s)B(\nu) + A'(s)\Lambda(s) -\\
&\qquad -\Big(D'(s)B + \beta(s,0)\Big)K\Big(B'\Lambda(\nu) + \Theta(0,\nu)\Big) + \Upsilon_3(s,\nu),\\
&\frac{d\,\gamma(s)}{ds} = A'_\tau\Lambda(s) - \beta(-\tau,s) + \gamma(0)K\Big(B'\Lambda(s) + \Theta(0,s)\Big) + \Upsilon_1(s)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&D(-\tau) = P'A_\tau + \gamma(0)K\Big(B'P + \Lambda'(0)\Big),\\
&\Lambda(-\Delta) = P'B_\Delta,\\
&\Pi(-\tau) = \Phi_4 + \gamma(0)K\gamma'(0),\\
&\Xi(-\Delta) = \Psi_4,\\
&R(-\tau,s) = A'_\tau D(s) + \gamma(0)K\Big(B'D(s) + \beta'(s,0)\Big),\\
&\Theta(-\Delta,s) = B'_\Delta\Lambda(s),\\
&\beta'(s,-\Delta) = B'_\Delta D(s),\\
&\gamma(-\Delta) = \Upsilon_2
\end{aligned}
\tag{8}
$$

и условиями симметрии $P = P'$, $\quad R(s,\nu) = R'(\nu,s)$, $\quad \Theta(s,\nu) = \Theta'(\nu,s)$.

При этом управление с обратной связью

$$u^*(x,y(\cdot),w(\cdot)) = -K\left[\Big(B'P+\Lambda'(0)\Big)x + \int\limits_{-\tau}^{0}\Big(B'D(s)+\beta'(s,0)\Big)y(s)\,ds + \right.$$
$$\left. + \gamma'(0)y(-\tau) + \int\limits_{-\Delta}^{0}\Big(B'\Lambda(s)+\Theta(0,s)\Big)w(s)\,ds\right], \tag{9}$$

где $K=[\Xi(0)+M]^{-1}$, *является решением задачи* (1), (2), (4).

Показано, что на основе подходящего выбора матриц $\Phi_0,...,\Upsilon_3$ уравнения могут быть упрощены, и их решение явно сводится к решению алгебраического матричного уравнения. Рекомендовано выбирать матрицы $\Phi_0,...,\Upsilon_3$ следующим образом

$$\begin{aligned}
&\Phi_0 = C_{\phi 0},\\
&\Phi_1(s) = -P'A(s) - R(0,s) + [P'B+\Lambda(0)]K[B'D(s)+\beta'(s,0)],\\
&\Phi_2(s) = \phi_2(s),\\
&\Phi_3(s,\nu) = -D'(s)A(\nu) - A'(\nu)D(s) + [D'(s)B+\beta(s,0)]K[B'D(\nu)+\beta'(\nu,0)],\\
&\Phi_4 = C_{\phi 4},\\
&\Psi_1(s) = -P'B(s) - \beta(0,s) + [P'B+\Lambda(0)]K[B'\Lambda(s)+\Theta(0,s)],\\
&\Psi_2(s) = \psi_2(s),\\
&\Psi_3(s,\nu) = -\Lambda'(s)B(\nu) - B'(\nu)\Lambda(s) + [\Lambda'(s)B+\Theta(s,0)]K[B'\Lambda(\nu)+\Theta(0,\nu)],\\
&\Psi_4 = C_{\psi 4},\\
&\Upsilon_1(s) = -A'_\tau\Lambda(s) + \beta(-\tau,s) + \gamma(0)K[B'\Lambda(s)+\Theta(0,s)] + \upsilon(s),\\
&\Upsilon_2 = -\int\limits_{-\Delta}^{0}\upsilon(s)\,ds,\\
&\Upsilon_3(s,\nu) = -D'(s)B(\nu) - A'(s)\Lambda(s) + [D'(s)B+\beta(s,0)]K[B'\Lambda(\nu)+\Theta(0,\nu)]
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $C_{\phi 0}, C_{\phi 4}, C_{\psi 4}, \phi_2(s), \psi_2(s), \upsilon(s)$ — произвольные матрицы соответствующих размерностей.

Теорема 2 *Пусть в системе ОУР* (7) *матрицы* $\Phi_0,...,\Upsilon_3$ *выбраны согласно* (10), $C_{\phi 0}, C_{\phi 4}, C_{\psi 4}$ *— симметричные матрицы;* $\phi_2(s)$ *— симметричная матрица с кусочно-непрерывными на* $[-\tau;0]$ *коэффициентами;* $\psi_2(s), \upsilon(s)$ *— симметричные матрицы с кусочно-непрерывными на* $[-\Delta;0]$ *коэффициентами. Пусть* P *является решением матричного уравнения*

$$\begin{aligned}
PA + A'P + e^{A'\tau}PA_\tau + A'_\tau Pe^{A\tau} + \int\limits_{-\tau}^{0}\phi_2(\zeta)\,d\zeta + C_{\phi 4} + C_{\phi 0} = \\
= \Big(PB + e^{A'\Delta}PB_\Delta\Big)K\Big(B'P + B'_\Delta Pe^{A\Delta}\Big),
\end{aligned} \tag{11}$$

а матрицы $D(s)$, $\Lambda(s)$, $\Pi(s)$, $\Xi(s)$, $R(s,\nu)$, $\Theta(s,\nu)$, $\beta(s,\nu)$, $\gamma(s)$ заданы по формулам

$$D(s) = e^{A'(s+\tau)}P'A_\tau, \qquad \Pi(s) = \int\limits_{-\tau}^{s} \phi_2(\zeta)\,d\zeta + C_{\phi 4},$$

$$R(s,\nu) = \begin{cases} T(s)D(\nu), & (s,\nu) \in \Omega_{\tau 1}, \\ D'(s)T'(\nu), & (s,\nu) \in \Omega_{\tau 2} \end{cases}$$

$$\Lambda(s) = e^{A'(s+\Delta)}P'B_\Delta, \qquad \Xi(s) = \int\limits_{-\Delta}^{s} \psi_2(\zeta)\,d\zeta + C_{\psi 4},$$

$$\Theta(s,\nu) = \begin{cases} Q(s)\Lambda(\nu), & (s,\nu) \in \Omega_{\Delta 1}, \\ \Lambda'(s)Q'(\nu), & (s,\nu) \in \Omega_{\Delta 2} \end{cases}$$

$$\beta(s,\nu) = D'(s-\nu-\Delta)B_\Delta, \qquad \gamma(s) = \int\limits_{0}^{s} \upsilon(\zeta)\,d\zeta,$$

где

$$\Omega_{\tau 1} = \{(s,\nu) \in [-\tau,0]\times[-\tau,0] : s < \nu\},$$
$$\Omega_{\tau 2} = \{(s,\nu) \in [-\tau,0]\times[-\tau,0] : s > \nu\},$$
$$\Omega_{\Delta 1} = \{(s,\nu) \in [-\Delta,0]\times[-\Delta,0] : s < \nu\},$$
$$\Omega_{\Delta 2} = \{(s,\nu) \in [-\Delta,0]\times[-\Delta,0] : s > \nu\},$$
$$T(s) = A'_\tau e^{-A'(s+\tau)}, \quad Q(s) = B'_\Delta e^{-A'(s+\Delta)}.$$

Тогда матрицы $P, D(s), \Pi(s), R(s,\nu), \Lambda(s), \Xi(s), \Theta(s,\nu), \beta(s,\nu), \gamma(s)$ являются решением ОУР.

ТРЕТЬЯ ГЛАВА посвящена построению и анализу стабилизирующих свойств регулятора.

Согласно разработанному подходу для построения управления с обратной связью необходимо
1) вычислить матрицу P, являющуюся решением матричного уравнения (11),
2) вычислить матрицы $D(s)$, $\Lambda(s)$, $\Pi(s)$, $\Xi(s)$, $R(s,\nu)$, $\Theta(s,\nu)$, $\beta(s,\nu)$, $\gamma(s)$ подстановкой P в соответствующую формулу,
3) построить управление с обратной связью, подставив в формулу (9) соответствующие матрицы.

Следующей задачей, после нахождения явного вида регулятора, является задача исследования его стабилизирующих свойств.

Теорема 3 *Пусть выполнены следующие условия:*
(1) *весовой функционал* $Z[x, y(\cdot), w(\cdot)]$ *является положительно определенным на* H,
(2) *матрицы* $P, D, R, \Pi, \Lambda, \Theta, \Xi, \beta, \gamma$ *являются решением системы ОУР* (7),
(3) *функционал* $W[x, y(\cdot), w(\cdot)]$ *является положительно определенным на* H,
тогда система (1) *стабилизируема и управление с обратной связью* (9) *является решением задачи стабилизации* (1), (2) *в классе стабилизирующих управлений.*

Замкнутую систему в дифференциальной форме (3), в которой управление формируется согласно (9), можно рассматривать по как систему с запаздыванием только в фазовых переменных относительно переменной $z = (x; u)$.

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = \ & \hat{A}z(t) + \hat{A}_\tau z(t-\tau) + \hat{B}_\Delta z(t-\Delta) + \\ & + \int\limits_{-\tau}^{0} \hat{A}(s) z(t+s)\, ds + \int\limits_{-\Delta}^{0} \hat{B}(\zeta) z(t+\zeta)\, d\zeta, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ EA + L_\tau(0) & EB + L_\Delta(0) \end{pmatrix}, \hat{A}_\tau = \begin{pmatrix} A_\tau & 0 \\ EA_\tau - L_\tau(-\tau) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & B_\Delta \\ 0 & EB_\Delta - L_\Delta(-\Delta) \end{pmatrix}, \hat{A}(s) = \begin{pmatrix} A(s) & 0 \\ EA(s) + \frac{L_\tau(s)}{ds} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{B}(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & B(\zeta) \\ 0 & EB(\zeta) + \frac{L_\Delta(\zeta)}{d\zeta} \end{pmatrix}.$$

Теорема 4 *Система* (12) *асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда существует число* $T > 2m$, $m = \max\{\tau; \Delta\}$, *что*

$$\left(\max_{-2m \le s \le 0} \|Z[T+s]\| \right) \times$$

$$\times \left(1 + \tau\|\hat{A}_\tau\| + \Delta\|\hat{B}_\Delta\| + \int\limits_{-\tau}^{0}\int\limits_{-\tau}^{s} \|\hat{A}_\tau(\nu)\|\, d\nu ds + \int\limits_{-\Delta}^{0}\int\limits_{-\Delta}^{\zeta} \|\hat{B}_\Delta(\mu)\|\, d\mu d\zeta \right) < 1$$

В ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВЕ описываются численные методы решения линейных систем с запаздыванием и численные методы поиска параметров стабилизирующего управления.

Вводится дискретная численная модель системы (12) $v_k \in R^n$, как приближение точного решения $x_k \equiv x(t_k)$ в точке t_k. Отметим, что, если на дискретной предыстории v_k, $k = 0, 1, ..., N$, определить оператор интерполирования [7], то на $[0, T]$ будет определена функция $v(\cdot)$.

Методом Тейлора, в котором удерживаются слагаемые до n-го порядка включительно, назовем пошаговую модель

$$v_{k+1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{v_k^{(i)}(t_{k+1} - t_k)^i}{i!}, \quad v_0 = x_0. \tag{13}$$

Невязкой (погрешностью аппроксимации) полученного таким образом метода Тейлора назовем функцию

$$\psi(t_k) = \frac{x_{k+1} - \sum\limits_{i=0}^{n} x_k^{(i)}(t_{k+1} - t_k)^i / i!}{t_{k+1} - t_k}.$$

Будем говорить, что невязка имеет порядок p, если существует такая константа C, что для всех $k = 0, 1, ..., N - 1$ имеет место неравенство $\|\psi(t_k)\| \leq C(t_{k+1} - t_k)^p$.

Будем говорить, что метод сходится, если $\max\limits_{1 \leq k \leq N} \|x_k - v_k\| \to 0$ при $N \to \infty$, и имеет порядок сходимости p, если найдется постоянная C такая, что $\|x_k - v_k\| \leq Ch^p$ для всех $k = 0, 1, ..., N$.

Утверждение 1 *Если в методе Тейлора* (13) *удерживаются слагаемые до p-го порядка включительно, то невязка имеет порядок p.*

Для того чтобы определить функционал правой части на приближенном решении, необходима интерполяция.

Оператором интерполирования I дискретной предыстории модели назовем отображение, которое для всех $k = 0, 1, ..., N$ устанавливает соответствие $I : \{v_i\}_{i=0}^{k} \to v(\cdot) \in Q[0; t_k]$.

Оператор интерполирования I имеет порядок p на точном решении, если существуют константы C_1, C_2 такие, что $\forall t^* \in [0; T]$ $\|x(t^*) - v(t^*)\| \leq C_1 \max \|x_i - v_i\| + C_2 h^p$, где $i = \overline{l_k : l_{k+1}}$, $t_{l_k} \leq t^* \leq t_{l_{k+1}}$, t_{l_k} и $t_{l_{k+1}}$ — соседние узлы разбиения временной сетки на отрезки гладкости $(p + 1)$-го порядка.

С помощью многочленов Лагранжа и Эрмита строится оператор интерполирования I, значениями которого являются многочлены $L_k^p(\cdot)$. Устанавливается порядок этого оператора.

Теорема 5 *Пусть точное решение $x(t)$ является p раз кусочно-непрерывно дифференцируемым, тогда оператор интерполирования I имеет p порядок погрешности интерполирования на точном решении.*

Теорема 6 *Пусть* 1) *в методе Тейлора* (13) *удерживаются члены до* p*-го порядка включительно;* 2) *точки кратные запаздыванию* τ, 2τ, $\ldots$, $(p+2)\tau$, Δ, 2Δ, $\ldots$, $(p+2)\Delta$ *включены во временную сетку;* 3) *оператор интерполирования имеет порядок* p *на точном решении. Тогда метод* (13) *сходится, порядок сходимости равен* p.

Нахождение коэффициентов метода Тейлора предполагает вычисление интегралов функции от предыстории. Эти интегралы приходится считать приближенно. Ниже приводится оценка для глобальной погрешности метода Тейлора с учетом приближенного вычисления коэффициентов.

Методом Тейлора, в котором удерживаются слагаемые до n-го порядка включительно с приближенным вычислением функционала $v^{(i)}$ назовем дискретную модель вида

$$v_0 = x_0, \qquad v_{k+1} = v_k + \sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{v}_k^{(i)} h_k^i}{i!}, \quad k = 1, ..., N,$$

где $\hat{v}_k^{(i)}$ — приближенное значение $\hat{v}_k^{(i)}$.

Аппроксимация функционала $x^{(i)}$ имеет порядок погрешности p на точном решении, если существует константа C_{xi}, что для всех $k = 0, 1, ..., N$ выполняется неравенство $\|x_k^{(i)} - \hat{x}_k^{(i)}\| \leq C_{xi}\, h^p$, где $\hat{x}_k^{(i)}$ — приближенное значение $\hat{x}_k^{(i)}$.

Невязкой с учетом приближенного вычисления функционалов $x^{(i)}$ метода Тейлора, в котором удерживаются слагаемые до n-го порядка включительно, назовем функцию вида

$$\hat{\psi}(t_k) = \frac{x_{k+1} - x_k - \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{x}_k^{(i)} h_k^i / i!}{h_k}.$$

Будем говорить, что методом Тейлора имеет невязку порядка p с учетом приближенного вычисления функционалов-производных, если существует константа C_ψ, что для всех $k = 0, 1, ..., N-1$ выполняется неравенство $\|\hat{\psi}(t_k)\| \leq C_\psi h^p$.

Утверждение 2 *Пусть метод Тейлора имеет невязку порядка* p*, аппроксимация функционалов-производных имеет порядок* p*, тогда метод Тейлора имеет невязку с учетом приближенного вычисления функционалов-производных порядка* p.

Теорема 7 *Пусть метод Тейлора имеет невязку порядка* p*, аппроксимация функционалов-производных имеет порядок* p*, оператор интерполяции имеет порядок* p*, тогда метод Тейлора сходится и имеет порядок сходимости* p.

В ПЯТОЙ ГЛАВЕ приводятся примеры синтеза стабилизирующего управления для 1-мерной и 2-мерной систем с последействием в управлении и координатах на основе разработанных алгоритмов. Приведен пример стабилизации 4-мерной системы (простейшей модели инфекционного заболевания [8]), что с точки зрения медицины интерпретируется как подавление инфекционного заболевания, которое в случае отсутствия лечения приводит к летальному исходу.

В ПРИЛОЖЕНИИ описаны программы на языке JavaScript и MATLAB, которые позволяют находить коэффициенты метода Тейлора для ФДУ и находить параметры стабилизирующего управления для рассматриваемых систем.

Список литературы

[1] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гостехиздат. 1959. 211 с.

[2] Красовский Н.Н. Об аналитическом конструировании регулятора для систем с последействием. ПММ, 1962. Т. 26. № 1. стр. 39–51.

[3] Красовский Н.Н. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием. Krasovskii N.N. Optimal Processes in Systems with Time Lag // Proc. 2nd IFAC Congress (Basel, 1963). Butterwoths, London. 1964.

[4] Ким А.В. i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: ИММ УрО РАН. 1996. 236 с.

[5] Ким А.В., Ложников А.Б. Линейно-квадратичные задачи управления для систем с запаздыванием по состоянию. Точные решения уравнений Риккати. Автоматика и телемеханика. 2000. № 7. стр. 15–31.

[6] Ким А.В., Волканин Л.С. К синтезу управления для систем с последействием в управляющих параметрах. Известия Уральского государственного университета. 2003. №26 стр. 81–86.

[7] Ким А.В., Пименов В.Г. i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. — М.-Ижевск:ИНЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2004. 256 с.

[8] Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. М.: Наука. 1980. 264 с.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ
СТАТЬИ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ В ВЕДУЩИХ РЕЦЕНЗИРУЕМЫХ НАУЧНЫХ ЖУРНАЛАХ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ВАК.

[9] Солодушкин С.И. Стабилизация линейных систем с запаздыванием по времени в координатах и управлении // Труды института математики и механики УрО РАН, 2008. Т. 14, № 4 с. 143–158.

[10] Солодушкин С.И. О стабилизации систем с последействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. Ижевск. 2008. с. 140–141.

[11] Солодушкин С.И. Стабилизация систем с запаздыванием по времени в координатах и управлении // Системы управления и информационные технологии, 2009. 1.3(35) с. 404–406.

ДРУГИЕ ПУБЛИКАЦИИ

[12] Солодушкин С.И. Линейно-квадратичная задача стабилизации систем с запаздыванием по времени // Проблемы теоретической и прикладной математики. Екатеринбург, УрО РАН. 2008. с. 291–297.

[13] Солодушкин С.И. Линейно-квадратичная задача стабилизации систем с запаздыванием по времени Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2008. Тезисы докладов. 2008. с. 131–133.

[14] Солодушкин С.И. Стабилизация систем с запаздыванием по времени в координатах и управлении // Информационные технологии моделирования и управления, 2009. 2(54) с. 226–230.

[15] Солодушкин С.И. Об одном конструктивном критерии проверки стабилизируемости систем с запаздыванием по времени // Проблемы теоретической и прикладной математики. Екатеринбург, УрО РАН. 2009. с. 251–254.

Подписано в печать 5.11.2009 г. Формат 60x84/16
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 1,5 Усл. печ. л. 1,5
Тираж 100 экземпляров. Заказ №
Отпечатано в ИПЦ "Издательство УрГУ".
620083, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4